MSEL

Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 2, No. 8, 2009.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

La tradición matemática griega y el dominio del mundo en el Renacimiento

Xavier Garcia-Raffi
Universidad de Valencia

Abstract

En este artículo pretendemos mostrar cómo los estudios de matemáticas se han articulado a lo largo de la historia dentro de la educación superior. Nuestra tesis es que ninguna reforma educativa debe ignorar por un lado, el carácter de lenguage universal de la ciencia y de ciencia pura de las matemáticas y por otro el hecho de que los estudios técnicos han sido el contexto en el que se ha desarrollado, históricamnete, gran parte de la actividada científica matemática. El saber matemático acumulado desde la época de los griegos no puede ser entendido en su totalidad si se descontextualiza del entorno en el que fue generado, y en ese entorno, los estudios técnicos juegan un papel crucial y en donde cabe todo tipo de matemáticas.

In this article we want to show how mathematics have been considered as a part of the tertiary education along the history. Our thesis here is both, any change in the education system must consider its character of universal language in Science and Technology and also its role as a pure science itself and the fact that mathematical teaching has been historically developed in the framework of the engineering education. The Mathematical Knowledge since the Ancien Age can not be easily understood without considering the context where it was generated and, in this sense, the teaching of Mathematics in Engineering Education plays a crucial role where any kind of mathematical knowledge, pure and applied, can be considered.

Keywords: *Pitagorismo, aristotelismo, Platonismo, enseñanza de las matemáticas, historia de la matemática, Revolución Científica, Ingeniería.*

1 Introducción

La valoración de la matemática como el medio adecuado para la comprensión y dominio de la realidad fue el elemento esencial de la denominada revolución científica del Renacimiento. Esta valoración fue el resultado de una larga tradición de enseñanza académica en la que lucharon enfrentados dos modelos epistemológicos con valoraciones totalmente opuestas de lo que la matemática podía conseguir. Los sistemas platónico y aristotélico, los dos grandes sistemas filosóficos de la antigüedad, mantenían una apreciación enfrentada de la matemática fundamentada en el papel que los sentidos ejercían en el conocimiento de la realidad. La lenta recuperación del legado griego en Europa desde mediados del siglo XII recuperó su enfrentamiento que no se solucionaría definitivamente a favor del punto de vista platónico hasta finales del siglo XVII.

La matemática le parecía al aristotelismo una técnica abstracta y vacía de contenido sensorial, inadecuada para la investigación científica, una disciplina teórica sobre objetos puros que no tenían nada que ver con los objetos materiales con los que nos encontramos en la realidad. Las promesas del platonismo sobre una matemática capaz de explicar todos los fenómenos físicos del mundo eran meros sueños y sus resultados más elucubraciones que realidad. Así fue juzgado el *Timeo*, un diálogo complejo y oscuro en el que Platón exponía la posibilidad de realizar una física matemática que con estructuras geométricas explicara el comportamiento de los elementos físicos que componían el universo.

La idea de una física matemática fructificó y fue avanzando en los sistemas de enseñanza en paralelo al aumento de las aplicaciones de la matemática, aplicaciones que se producían en campos alejados de la investigación física como, por ejemplo, el de las finanzas o la metalurgia. Los éxitos convencían de la necesidad de universalizar la matemática y de la viabilidad del proyecto platónico. Fueron los modestos pero constantes avances de la matemática aplicada los que acabaron por imponer la matemática como el método propio de la ciencia moderna.

2 La tradición matemática en el mundo griego

Las dos grandes instituciones educativas del mundo griego— la académica platónica y el liceo aristotélico—, que prolongaron su vida durante siglos mucho más allá de la vida de sus fundadores, no sólo cumplieron su papel de preparar a las élites políticas e intelectuales sino que inspiraron sistemas antitéticos de comprensión de la realidad que, con altibajos, extenderían su enfrentamiento hasta los albores de la ciencia moderna. Dentro de ellas se concedió un papel distinto a las matemáticas tanto por las repercusiones que se pensaba que su enseñanza tendría sobre el incremento de las capacidades de raciocinio y conceptualización teórica de los seres humanos como por la utilidad que se otorgaba al lenguaje matemático en la investigación científica.

En el año 387 a.C. Platón fundó la Academia en Atenas. Volvía el filósofo de un largo peregrinaje —comenzado a consecuencia de la muerte de su maestro Sócrates— que le había llevado a contactar con los grandes centros del pitagorismo existentes en el sur de Italia, en especial con el pitagórico Arquitas de Tarento. La Academia debía obedecer a un modelo educativo distinto a los existentes. Platón había heredado de Sócrates una animadversión por las nuevas formas de enseñanza promulgadas por los sofistas. Aunque compartía con ellos el desprecio por la educación tradicional,— centrada en el estudio de la mitología, la historia, geografía, poesía y algo de retórica. Platón pensaba en una nueva *paideia* —un nuevo arte de enseñar—

y un nuevo *curriculum* que garantizara una educación armónica y en la que la matemática fuese central. La Academia sería el instrumento consagrado a ese fin: un centro de educación superior organizado como una universidad tanto por su organigrama (director, profesores, una incipiente distribución por asignaturas) como por su infraestructura: aulas, salas de conferencia, biblioteca, museo, alojamiento destinados a los estudiantes, etc.

La educación debía para Platón llevar al alumno del mundo de la *doxa* (opinión) — el mundo de los objetos físicos materiales y cambiantes al que accedemos a través de la información sensorial— al mundo universal y necesario de la *episteme* (la ciencia) obtenido por el razonamiento. La razón nos permite alcanzar objetos inmateriales —como las leyes científicas o los teoremas— que sin ser visibles a nuestros sentidos tienen el ser de los objetos físicos. En realidad, y pese a su aparente solidez, el mundo material depende de ese otro mundo de conceptos universales o esencias que tiene las razones de los avatares del mundo físico, su verdadera explicación.

En este esquema general, las matemáticas jugaban un papel decisivo. Eran, en primer lugar, una disciplina *propedeutica*, una disciplina sin la cual no era posible acceder a la ciencia. La matemática (el cálculo y la geometría, esencialmente) eran el instrumento ideal de la razón y su práctica mejoraba la capacidad de razonar en abstracto de manera que, en cualquier terreno intelectual, destacaba el individuo entrenado en la matemática por su mayor agilidad y orden en encontrar la verdad. Además, sólo las disciplinas capaces de organizarse matemáticamente merecían el calificativo de científicas porque la ciencia era para Platón una realidad deductiva. La ciencia era un entramado jerárquico de conceptos de universalidad creciente conectados entre sí por vínculos necesarios. El sabio es el que es capaz de recorrer las cadenas de conceptos justificando su verdad absoluta sin margen a la duda. La matemática hace explícito ese orden universal fuera del cual no es posible el conocimiento seguro. De ahí la admonición que se cuenta decoraba el frontispicio de la Academia: "Nadie entre que no sepa matemática", pues sin la matemática no podía enseñarse la verdad ([12], cap. ix.)

El rechazo del mundo sensible no iba asociado a la defensa de una matemática teórica sin aplicaciones prácticas. La relación entre la matemática pura y aplicada fue enfocada de una forma mucho menos dogmática de lo que pudiera suponerse por Platón. Su preocupación fundamental radicaba en que una práctica poco cuidadosa llevara a deformar los conceptos teóricos o bien que se infravalorará la teoría olvidando que gracias a sus avances era posible incrementar la seguridad de las aplicaciones matemáticas. Los agrimensores debían ser conscientes de que es posible seccionar un terreno gracias a los teoremas de la geometría. Los comerciantes que calculan sus ganancias no deben olvidar que lo hacen gracias a las matemáticas que estudia muchos más tipos de números que los reales con los que ellos suman y restan ánforas y monedas.

Si las aplicaciones matemáticas tienen éxito es porque la estructura del mundo es matemática. Esta afirmación heredada del pitagorismo era para Platón indudable. De hecho, por muy rigurosa que sea la observación sensorial— como las clasificaciones de las ciencias naturales[1]—, no obtendremos sino catálogos si no somos capaces de introducir la matemática, pues sólo el orden que la matemática introduce permite la obtención de leyes, requisito indispensable para tener entre las manos *episteme* y no *doxa.* La explicación racional de la realidad física debe ser matemática.[2]

[1] Vide la interpretación de J.L.Austin del pasaje de "la línea dividida" en que Platón establece los niveles del conocimiento. [4]

[2] Este era el mensaje esencial del pitagorismo tal y como nos lo explica Aristóteles en su exposición de las doctrinas físicas del pasado, pues de los pitagóricos quedan pocos textos originales por su condición de secta : "En tiempos de estos, e incluso antes, los llamados pitagóricos, que fueron los primeros en cultivar las Matemáticas, no sólo hicieron avanzar éstas, sino que, nutridos por ellas, creyeron que sus principios eran los principios de todos los entes. Y puesto que los Números son, entre estos prinicipios, los primeros por naturaleza, y en ellos les parecía contemplar muchas semejanzas con lo que es y lo que deviene, más que en el Fuego y en la Tierra y en el Agua.... y viendo, además, en los Números las afecciones y las proporciones de las armonías - puesto que,

El intento de elaborar una física matemática que podemos contemplar en el *Timeo*, uno de los diálogos de vejez de Platón, obedecerá a ese imperativo al tratar de explicar los cambios físicos en función de partículas invisibles de los elementos del mundo —agua, aire, tierra, fuego— dotados con las figuras geométricas de los polígonos regulares (icosaedro, octaedro, cubo, tetraedro) y dispuestos a su vez en estructuras geométricomatemáticas mayores que explican tanto las características de los objetos físicos como las de sus cambios. Una potente combinación de pitagorismo y atomismo envuelta en un alud de información deliberadamente críptica que conocemos deficientemente. La razón está en que hemos conservado de Platón sólo una parte de su obra —la divulgativa, destinada a popularizar los temas tratados en la Academia— y carecemos de los textos científicos utilizados como trasfondo de las investigaciones o como libros de texto para los alumnos[3].

Hemos expuesto el núcleo duro de lo que en la terminología del filósofo de la ciencia Imre Lakatos podríamos denominar el programa de investigación platónico[4], un programa que iría desarrollándose con los sucesivos directores de la Academia y cuyos éxitos más importantes se produjeron en el campo de la geometría y de la astronomía. El propio Platón realizó una larga serie de sugerencias con los puntos que debían ser solucionados y en los que había que centrar la investigación. En el campo de la Geometría debía procederse a una reconstrucción racional y sistemática de la geometría del plano. En la Astronomía —una aplicación de la Geometría— había que justificar que las órbitas irregulares aparentes de los planetas obedecían a órbitas verdaderas pero invisibles basadas en el círculo, una tarea que sería solucionada mediante el recurso a los epiciclos por Ptolomeo en su libro *Mathematike Syntaxis* conocido por los árabes como *Almagesto*—el más grande. En la Matemática pura era necesaria una definición general de número capaz de englobar las características de los distintos tipos de números, la tarea quizás más decisiva tras la crisis en la visión ingenua de la naturaleza de los números provocada por el descubrimiento de los números irracionales. Si la matemática es deducción —señalaba Platón— ninguno de los conceptos fundamentales debe ser *supuesto* hipotética o provisionalmente como verdadero, pues la verdad de la conclusión radica en la verdad de las premisas por muy rigurosa que haya sido su deducción. Todos los conceptos básicos de las matemáticas deben ser objeto de definición para garantizar que la sistematicidad de la cadena deductiva que de ellos depende no "es un sueño"([22],Libro VII, cap. xiii, 533c).

El segundo gran centro de enseñanza superior del mundo griego en el período clásico fue el Liceo, fundado por Aristóteles, inspirado en principios opuestos al platonismo y con una valoración de la matemática y su aplicación al mundo fuertemente restrictiva. El inicio de la vida intelectual de Aristóteles se desarrolló teniendo como telón de fondo la concepción platónica del conocimiento y de la ciencia. Aristóteles había sido uno de los mejores discípulos de la Academia platónica, de la que se separó, fundamentalmente, por su disgusto ante lo que él juzgaba tendencia creciente a la teorización de la que responsabilizaba a la orientación matemática de la epistemología platónica.

Aristóteles creía que Platón obró correctamente al definir el conocimiento científico como uni-

en efecto, las demás cosas parecían asemejarse a los Números en su naturaleza toda, y los Números eran los primeros de toda la Naturaleza, pensaron que los elementos de los Números eran los elementos de todos los entes, y que todo el cielo era armonía y número" [1] I, 5, 985b 23 - 986a 3

[3] El *Timeo* ha sufrido múltiples interpretaciones esotéricas, en parte por narrar un proceso creador del Universo a cargo del Demiurgo, una Inteligencia que contendría los arquetipos matemáticos en los que debe organizarse la materia del Universo

[4] "Un programa de investigación lakatosiano es una estructura que sirve de guía a la futura investigación tanto de modo positivo como de modo negativo. La heurística negativa de un programa conlleva la estipulación de que no se pueden rechazar ni modificar los supuestos básicos subyacentes al programa, su núcleo central...La heurística positiva está compuesta por líneas maestras que indican como se puede desarrollar el programa de investigación...Los programas de investigación serán progresistas o degeneradores según consigan o no conducir al descubrimiento de nuevos fenómenos" ([9] p.115)

Para una historia de la Academia vide [6] versal y necesario, pero erró al postular para ello la existencia de unas entidades —las formas o ideas— que eran el objeto del conocimiento científico y sin embargo existían al margen de los objetos sensibles. La ciencia debe conocer lo universal, pero el universal no puede estar realizado al margen de los individuos. Para Aristóteles la suposición de la existencia de las ideas no estaba fundamentada y era gratuita e inútil. Las estructuras matemático-geométricas en que la teoría de las Ideas había derivado no parece que mejorara su valoración. Si la ciencia es conocimiento universal debe buscar los universales en los individuos, en las cosas particulares, en el mundo sensible; puesto que este es el único mundo y la única realidad.[5] Los universales no existen al margen de los individuos particulares. Sólo las cosas singulares son reales.

La ciencia no puede comenzar sino en la sensación, en la observación de las propiedades de los fenómenos de las que se cribarán las propiedades esenciales mediante la combinación de la inducción y la deducción: la inducción señala las características presentes en todos los casos [6] en [3] y la deducción demuestra cuáles de estas son los principios o causas del fenómeno sin las que no puede ser entendido, pues constituyen su esencia, aquello que no puede faltarle. Conocer científicamente algo es conocer los principios explicativos que lo justifican, conocer sus causas[7]. Era en la justificación de las causas del fenómeno donde Aristóteles ponía en acción el esquema lǿgico del silogismo: en las premisas se coloca el universal (siguiendo la figura y el modo más adecuada al caso) y en la conclusión el fenómeno.[8] Si el universal justifica lógicamente la conclusión, es causa necesaria del fenómeno que es su efecto. La lógica venía así a sustituir a las matemáticas en la investigación de la naturaleza.

La lógica era para Aristóteles una parte de la preparación de una educación superior que toda persona educada debía poseer. La lógica era un *organon* o método general preliminar a todo estudio científico, un requisito a conocer a semejanza de la admonición que sobre la matemática hacía el frontispicio de la Academia. Una ciencia que permite conocer los tipos de prueba y justificaciones necesarias para cada caso, que da la base para diferenciar cuando es correcta o incorrecta la argumentación. Aristóteles la organizó como disciplina y ésta conservó su organización sin grandes cambios hasta finales del siglo XIX. El aprendizaje de las figuras y modos de los silogismos válidos formaba parte de la educación básica impartida en el Liceo y se mantendrá como parte de la rutina educativa de las universidades medievales sin ponerse en duda su idoneidad para la investigación científica hasta el Renacimiento.

El ataque que Aristóteles lanza contra el intento pitagórico de equiparar realidad y número pretende ser radical y definitivo. Para Aristóteles la matemática es una metodología científica secundaria y puramente ideal, no aplicable a la física ni a cualquier ciencia que trate con objetos materiales. Aparentemente, los cuerpos físicos contienen planos, puntos, líneas, etc., pero no por ello son un mismo objeto de estudio para la matemática que para la física. La

[5] "Después de las filosofías mencionadas llegó la teoría de Platón, que, en general, está de acuerdo con estos [los pitagoricos], pero tiene también cosas propias, al margen de la filosofía de los itálicos... Por otra parte, ocupándose Sócrates de los problemas morales y no de la Naturaleza en su conjunto, pero buscando en ellos lo universal y habiendo sido el primero que aplicó el pensamiento a las definiciones, [Platón] aceptó sus enseñanzas, pero por aquél motivo pensó que esto se producía en otras cosas, y no en las sensibles; pues le parecía imposible que la definición común fuese de alguna de las cosas sensibles, al menos de las sujetas a perpetuo cambio. Éste, pues, llamó a tales entes Ideas, añadiendo que las cosas sensibles están fuera de éstas, pero según éstas se denominan todas; pues por participación tienen todas las cosas que son muchas el mismo nombre que las Especies" ([1],I, 6, 987a 29 - 987b 9)

[6] "Por eso también, si estando sobre la Luna viéramos que la Tierra se interpone, no sabríamos la causa del eclipse [lunar]. En efecto, percibiríamos que se eclipsa, pero no por qué en general; pues vimos que la sensación no lo era de lo universal. No por ello, sin embargo, a base de contemplar muchas veces ese acontecimiento, dejaríamos, tras captar lo universal, de tener una demostración: pues a partir de la pluralidad de singulares se hace evidente lo universal" (*Analíticos Segundos*87b 38 - 88a 5)

[7] "Creemos que sabemos cada cosa sin más, pero no del modo sofístico, accidental, cuando creemos conocer la causa por la que es la cosa, que es la causa de aquella cosa y que no cabe que sea de otra manera" (*Analíticos Segundos.* 71b 9-12)

[8] "A la demostración la llamo razonamiento científico; y llamo científico a aquel [razonamiento] en virtud de cuya posesión sabemos. Si, pues, el saber es como estipulamos, es necesario también que la ciencia demostrativa se base en cosas verdaderas, primeras, inmeditatas, más conocidas, anteriores y causales respecto de la conclusión: pues así los principios serán también apropiados a la demostración. En efecto, razonamiento lo habrá también sin esas cosas, pero demostración no: pues no producirá ciencia" (*Analíticos Segundos*71b 18-25)

matemática se ocupa de las figuras como si no fueran los límites de los objetos materiales.[9] Hace abstracción de los cuerpos dejándolas sin conexión alguna ni con el movimiento ni con el cambio. Este carácter abstracto diferencia el punto de vista de la matemática y de la física. El matemático hace abstracción de todos los predicados sensibles que importan al físico (pesadez o ligereza, caliente o frío), limitándose a estudiar propiedades abstractas. Los dos conceptos sobre los que basa la matemática el estudio de los cuerpos — extensión (geometría) y cantidad (aritmética) — no son propiedades esenciales de las cosas, sino meros accidentes. Ni la extensión es la esencia de la materia ni la cantidad el fundamento de los cambios de los cuerpos o de su comportamiento. Los últimos componentes de una sustancia son los cuatro elementos y, por último, la materia prima, pero ninguno de ellos puede ser matematizable ([2],I,8,325b). [10].

La diferencia entre matemática pura y aplicada no radica más que en el grado de universalidad de las propiedades abstractas tratadas, pues las propiedades han sido en cualquier caso despojadas de su realidad concreta. En ocasiones— admite Aristóteles— pueden representar la realidad como es el caso de la óptica cuyas líneas representan líneas físicas, pero no podrán predecir los cambios de la realidad. Su universalidad sigue dependiendo de su carácter abstracto y ello no la hace capaz de formular predicciones sobre realidades existentes concretas. La física debe estudiar los cambios y movimientos de los seres naturales en función de su materia y forma. Son estos los dos conceptos fundamentales e inseparables entre sí. Respecto a ellos la matemática no puede ejercer más papel que uno secundario.[11] En realidad, la matemática y la teología están fuera del campo de la física, ya que se ocupan de seres inmutables (los dioses y los números) mientras que la física se ocupa de los seres naturales, aquellos en los que se producen cambios y transformaciones porque poseen una fuente propia de movimiento y reposo.

La física aristotélica se convirtió en la física predominante porque fue capaz de ofrecer una visión completa, jerárquica y estable del Universo afianzándola en la sensación. Presentaba una amplia capacidad explicativa de los fenómenos que enmascaraba su deficiente capacidad predictiva pero que enlazaba con una aparente visión “natural” del mundo, lo que se ha venido en denominar *metafísica del sentido común.* No es posible hallar en la física aristotélica fórmulas matemáticas que vayan más allá de meras proporciones, quizás la más relevante para la historia de la ciencia sea aquella en que se define la velocidad de caída de los cuerpos graves como directamente proporcional a su peso. Fue refutado por Galileo delante del claustro de la universidad de Pisa arrojando simultáneamente dos esferas de barro y hierro que alcanzaron el suelo simultáneamente.[12].

Cuando se contempla la actividad científica aristotélica en el campo de la física se la suele imaginar deficiente y poco precisa por la falta de tecnología y del contexto experimental propio de la ciencia moderna. Sin embargo, es más bien la falta de un entramado matemático la que arrebata a la cuidadosa observación todas sus posibilidades. Simplicius, uno de los físicos aristotélicos más significativos, diseña un verdadero experimento mental para explicar la dispersión de las gotas de agua de un surtidor como producto del movimiento acelerado de la caída de los graves aplicado a las pequeñísimas diferencias de tiempo que deberían existir en la emisión

[9] “Pues bien, de las cosas que se definen y de las quididades, unas son como lo chato, y otras como lo cóncavo. Y se diferencian en que lo chato se toma junto con la materia (pues lo chato es una nariz cóncava) mientras que la concavidad es independiente de la materia sensible” (*Metafísica*, VI, 1025 b 30-34) ([1], VI, 1025 b 30-34)

[10] El rechazo al vacío geometrizado del *Timeo* platónico se deduciría de esta posición. Vide *Acerca de la generación y la corrupción*, II, 329a 14 -24, traducción de Ernesto La Croce y Alberto Bernabé, Gredos, Madrid 1987

[11] Passim, en especial [1],IV, 2, 997b - 998a.

[12] Para Aristóteles todo cuerpo está sometido a dos fuerzas: una es la potencia y otra la resistencia. La velocidad con la que un cuerpo se mueve es directamente proporcional a la magnitud de la potencia e inversamente a la magnitud de la resistencia. La caída de un cuerpo pesado en un medio tal como el aire o el agua representa para Aristóteles el movimiento más simple que se pueda imaginar: la potencia está representada por la pesadez del móvil y la resistencia proviene del fluido que el móvil atraviesa. El experimento de Galileo, recreado literariamente hasta la saciedad, ha sido puesto en duda por algunos autores.

de cada una de las gotas que formaban el chorro inicial. Ningún paso posterior será posible ni para confirmar ni para refutar su aserto en otros casos. El estudio minucioso del fenómeno queda como un hecho aislado que no sirve para nada más que para ejemplificar la afirmación del maestro sobre el comportamiento de los graves.[13]

3 El movimiento alejandrino

Pero el gran centro de educación e investigación del mundo antiguo fue sin duda el Museo de Alejandría, continuador de la organización de sus antecesores atenienses pues su fundador, Demetrio de Falero, había sido discípulo del Liceo y a su semejanza estableció una comunidad de investigadores. Los reyes de la dinastía de los Ptolomeos pusieron incontables medios a su servicio y en especial la fabulosa biblioteca que llegó a contar antes de su incendio con más de 700.000 volúmenes. Aunque el fin del Museo era la investigación, la enseñanza ocupaba también su lugar.[14] Los eruditos dirigían jóvenes prometedores como ayudantes de investigación y por medio de conferencias y simposios ofrecían a la sociedad algún tipo de enseñanza pública, características pedagógicas que se reforzaron con el dominio romano de Alejandría.

En principio, la influencia decisiva de la organización del Museo fue la de Aristóteles cuya biblioteca constituyó el núcleo inicial de la Gran Biblioteca; pero animado el Museo del espíritu abierto que impregnaba la ciudad, se permitió una amplia libertad de miras a sus investigadores y en especial a los matemáticos que continuaron las vías abiertas por Platón y avanzaron en el desarrollo de lo que denominamos programa de investigación platónico. El exponente más claro de dicha continuidad fue Euclides y *Los Elementos*, una síntesis que siempre ha asombrado por su perfección y coherencia lógica así como por su capacidad expositiva de los avances obtenidos en varios siglos de estudios matemáticos. *Los Elementos* se componen de trece libros que versan sobre la geometría plana, las proporciones y relaciones, la aritmética y la geometría del espacio. Euclides transmitió a la posteridad el mensaje pitagórico junto con el ideal de la ciencia deductiva platónico en un elaborado encadenamiento de teoremas que ha influenciado a matemáticos de todas las épocas como un ideal de perfección que ha intentado trasladarse a las ciencias físicas como el modelo perfecto de organización científica.

Pero sería Arquímedes la muestra más sobresaliente de la capacidad tecnológica de dominio del mundo que ofrecía la matemática hasta el punto que sólo la presencia de la esclavitud puede justificar para los historiadores de la ciencia que en Alejandría y en su esfera de influencia no se desatara una verdadera revolución industrial. Aunque desconozcamos con precisión el método seguido por Arquímedes, sabemos que éste no dudaba en utilizar esquemas mecánicos para resolver problemas geométricos igual que intentaba aproximarse a los problemas mecánicos a través de teoremas garantizados por la deducción geométrica. Este uso de métodos de niveles de conocimiento distintos parecen sugerir la presencia de un método general de investigación próximo al hipotético deductivo de la ciencia moderna aunque carezcamos de constancia documental que avale esta posibilidad. Esta sospecha se refuerza por la extraordinaria preocupación de Arquímedes por el cálculo y la elaboración de sistemas propios de notación que extendieran

[13] Explicado por Duhem en [10],tomo I,p.388
[14] [16], pp.94 y ss.

la capacidad predictiva de la matemática a la realidad[15]. Sus éxitos en mecánica[16], estática e hidrostática, ejemplificados en múltiples anécdotas sacralizadas por la tradición, le hicieron entrar en la leyenda convirtiéndole en el prototipo del sabio, y a sus máquinas en ejemplos vivos del poder de la ciencia ([23],p.126 y ss).

4 El lento resurgir del ideal matemático platónico en la Edad Media

Todas las explicaciones dadas en torno al proceso de decadencia de la ciencia en el mundo antiguo coinciden en asociarlo a la decadencia del mundo urbano sufrido en el proceso de destrucción del imperio romano. Antes, incluso, de la decadencia del imperio, la ciencia estaba en retroceso en Occidente. La crisis social constituyó el caldo de cultivo de una revitalización general de la magia, la astrología y la difusión de cultos religiosos que rechazaban el legado de la cultura clásica. En el Bajo Imperio Romano, el peso de la educación científica disminuye y las materias de las que son objeto los jóvenes se centran en lo que el mundo medieval denominará artes liberales, base de la división en *trivium* y *quadrivium*, en la que la matemática ha quedado reducida a la aritmética elemental junto a una fatigosa especulación dialéctica sobre los tipos de números.[17] La destrucción de la vida urbana y la fragmentación que acompañó la desaparición del imperio romano supuso la revitalización del mundo rural y el retroceso de la cultura y de la enseñanza a los monasterios en los que se conservará los restos de la ciencia antigua aunque supeditada a una cultura religiosa.

La organización educativa del mundo medieval tuvo su origen en la definición dada por San Agustín en el siglo V d.C. del concepto de ciencia cristiana, una ciencia destinada a substituir la sabiduría pagana —fruto exclusivo de la razón— por la sabiduría superior de la razón iluminada por la fe. Dado que la ciencia más elevada para los cristianos era el estudio de la revelación, la enseñanza debía culminar en el estudio de las Escrituras. El saber pagano rendirá beneficios a la fe utilizándolo instrumentalmente para el estudio de la Biblia, pero sin aspirar a perder la perspectiva de que no son sino una ayuda para comprender mejor la palabra de Dios.

La estabilización del mundo medieval conseguida por Carlomagno puso en marcha de nuevo un sistema de enseñanza superior destinada a obtener funcionarios que gestionaran la progresiva complejidad del Imperio Carolingio. Su estructura fue diseñada por Alcuino de York (m. 804) siguiendo los parámetros agustinianos. Surge así en la Alta Edad Media la división entre el *Trivium* (gramática, retórica y dialéctica) y el *Quadrivium* (aritmética, geometría, astronomía y música), siete grados necesarios como base previa al estudio de las Escrituras que permitía obtener el título de Bachiller Bíblico. En aquel momento, todo lo que se conocía de la matemática griega estaba basado en la obra de Boecio, un filósofo neoplatónico del siglo VI d.C que tradujo las *Categorias* de Aristóteles. Boecio transmitió al mundo medieval la lógica aristotélica, pero también resumió en sus obras una aritmética y geometría muy elemental asociadas, desgraciadamente, a la especulación sobre la naturaleza de los números; resto degradado del programa platónico de definición de los componentes de la serie numérica ya comentado.

[15] Arquímedes en *El arenario,* calcula para el hijo del rey Hieron II el número de granos de arena necesarios para llenar el universo. El sistema de numeración griego, basado en las letras del alfabeto, no alcanzaba a representar un número superior a la míriada de la míriada (100.000.000). Tomando como módulo la semilla de la amapola (diez milésima parte de un estadio) y suponiendo que contendría 10.000 granos de arena, Arquímedes elaboró una notación capaz de enunciar un número$10^{8^{10^8}}$ Vease [18],pp. 94-5

[16] Vide la exposición sobre el carácter esencial de la palanca en los descubrimientos mecánicos de Arquímedes en [17]

[17] Organizada por Plotino y el neoplatonismo en el siglo III d.C en la que se transformaba a los números en símbolos de una misteriosa unidad universal conseguida en un complicado proceso de emanación desde el Ser de los seres espirituales y materiales, un remedo de la armonía pitagórica del universo.

La ausencia de un soporte adecuado —el papel no se generalizaría en la enseñanza hasta bien entrado el siglo XV— y la modalidad de enseñanza centrada básicamente en torno al modelo de la *lectio* o comentario magistral de un manual hacen de la enseñanza de las matemáticas un ejercicio rutinario basado en el aprendizaje memorístico de problemas estándar y de las operaciones necesarias para resolverlos.

Pronto la progresiva especialización obligó a crear estudios de Medicina y Derecho; pero fue la paulatina introducción de la ciencia griega a través de los centros de traducción de Toledo y Nápoles el factor determinante en el cambio de esta situación. La escuela de traductores de Toledo, que traducía del árabe y el judío al latín, filtró desde la segunda mitad del siglo XII los restos del saber antiguo que los árabes habían encontrado en el conjunto de bibliotecas que habían conformado el área de la ciencia alejandrina, en especial la de Siria.

A diferencia del imperio romano de Occidente, el de Oriente había conservado su entramado urbano y el conjunto asociado de bibliotecas e instituciones científicas creadas en el período alejandrino. En Atenas, Alejandría, Antioquia y Constantinopla continua la enseñanza superior y a ellas acuden estudiantes desde todo el Oriente. Conocemos los nombres de algunos de los científicos que continuaron la tradición matemática alejandrina y con ella el ideal matemático platónico. En el siglo V la matemática Hypatia continuaba la investigación en lo que quedaba de la Biblioteca de Alejandría y en el siglo VI Pappus escribe su obra *Colección matemática*, una recopilación general de la matemática griega.

Serán los árabes los que transmitirán a Occidente los restos de la matemática griega pero también los avances en trigonometría y cálculo obtenidos por los hindúes y, sobretodo, las cifras arábigas, cuyo origen está en la utilización de una numeración decimal de posición por los hindúes desde el siglo VI.[18] Los principales centros de producción científica árabes serán Bagdad, Damasco y Córdoba, siendo éste último el puente para la recuperación de la ciencia griega por Occidente a través de Toledo.

El nivel de la matemática árabe puede sintetizarse en dos nombres esenciales para el algebra. El primero es Al-Khwarizmi, autor en Bagdad en el siglo IX de una aritmética que popularizó el uso de la numeración india y de *El pequeño libro de al-jabr y de al-muqabala* — el primer tratado de algebra—, cuyo nombre derivaría precisamente del título de la obra. Traducida en el siglo XII gozaría de una rápida popularidad. Al-Kharizmi organizaba las ecuaciones posibles en seis modelos tipo de ecuaciones lineales y cuadráticas. El continuador del algebra de Al-Kharizmi sería Al-Karaji, que en el siglo XI elaboraría un tratado de algebra en el que se traducía parte de los numerosos casos extraídos de las *Aritméticas* de Diofante. El reconocimiento de la superioridad árabe puede plasmarse en el caso de Gerbert d'Aurillac, que llegaría a ser Papa con el nombre de Silvestre II, que visitó Cataluña y de la que trajo entre otros conocimientos matemáticos el uso de las cifras arábigas de las que se conoce ejemplos de manuscritos occidentales que las contienen desde aproximadamente el año 976 ([23], p.196).

La gran avalancha de las traducciones árabes comenzará desde finales del siglo XII. A las instituciones escolares que habían alcanzado cierto renombre (Chartres, Reims, Bologne, Toledo, Nápoles) llegaban las primeras traducciones que impresionaban por la superioridad de su nivel científico y obligaban a ir agrandando el contenido de las materias impartidas. En la escuela de Chartres, el conocimiento de fragmentos del *Timeo* platónico provoca un intento de explicar el proceso de creación del Génesis con los patrones matemáticos sugeridos por Platón, pero será en París —la metrópoli científica de la época— donde el impacto será extraordinario. Prácticamente desde el 1200 la mayor parte de los escritos de Aristóteles eran accesibles junto

[18] Benoti, Paul y Micheau, François; "¿El intermediario árabe?" en [23]

con las versiones y recopilaciones que de los científicos griegos habían hecho los sabios árabes y judíos como Alkindi, Averroes, Alfarabi, Isaac Israeli, Avicebron y Avicena. Los matemáticos disponen de la obra de Al-Khwarizmi, las *Cónicas* de Apolonio y los *Elementos* de Euclides. En el siglo XIII, Guillermo de Moerbercke, el gran traductor de Aristóteles, traduce directamente del griego a Arquímedes. En este mismo siglo la nueva aritmética venida del mundo árabe se extiende. Su gran divulgador será Sacrobosco autor de un *Algoritme*, de inmenso éxito. Obra dirigida al ámbito universitario, utiliza guarismos árabes, la numeración de posición y practicaba el cálculo borrando los resultados intermedios.

La división académica existente en París era una continuación de la vieja división del *trívium* y el *quadrivium* disfrazada tras el rótulo de facultad de Artes y facultad de Teología. Ante la nueva realidad científica, la facultad de Artes reclama libertad para independizarse del control de la facultad de Teología y todos los nuevos planes de reorganización de los estudios tienen en cuenta las nuevas materias. Domingo Gundisalvo,([24], p.89 y ss.), uno de los maestros de Toledo, propone una reforma de los estudios que obtuvo una importante resonancia y en la que habían tres grados progresivos del saber marcados por la gramática y retórica (*Scientae Eloquentiae),* la lógica (*Scientae Media*) y la matemática y la física para el nivel teórico superior (*Scientae Sapientae*). La recuperación del carácter central para la matemática y la física de los estudios superiores sería confirmada en el pensamiento de los principales científicos del siglo XIII, en especial en Rogerio Bacon. A pesar de la aceptación de la física aristotélica por la superioridad de su estructuración del universo frente a los conocimientos medievales, Bacon enfatizó la necesidad de elaborar un nuevo método científico que extrajera de la observación resultados más significativos que los de la lógica aristotélica. La matemática, señala, es la clave de las ciencias pues no basta con buscar hipótesis explicativas de los fenómenos a través de la combinación de la inducción y el silogismo, es necesario verificar las hipótesis mediante la consideración de los resultados que se seguirían si la hipótesis fuera correcta y esos resultados tienen sentido sólo si son cuantificados por la matemática.

En la misma dirección avanzaría en el siglo XIV el nuevo movimiento científico del occamismo tanto en su insistencia en el carácter de juez de la experiencia frente a cualquier autoridad como por la importancia que se da al número, en oposición a la teoría del conocimiento aristotélica, como símbolo de los aspectos esenciales de la realidad. Aunque la visión del occamismo como un precursor de la ciencia moderna sea una simplificación que olvida la fuerte dependencia del movimiento de una teología radical forjada en disputas contra la autoridad eclesiástica, la rama científica del occamismo realizó una revisión general de la recuperada física aristotélica tomando como blanco de sus críticas la teoría aristotélica del movimiento. Nicolas de Oresme y Juan de Buridan rechazaron el concepto de lugar natural como fin del movimiento aristotélico, elaboraron la teoría del ímpetus —un rudimento de la dinámica galileana—y defendieron la necesidad de la representación matemática de los fenómenos que, en el caso de Oresme, quizás el más importante de los físicos medievales, adoptaba la forma de gráficas de representación de los movimientos estudiados([11],p.60).

5 El Renacimiento: el triunfo del ideal platónico gracias a artilleros y banqueros.

El Renacimiento supondrá la aparición de escuelas técnicas especializadas en las que las matemáticas son el elemento esencial del curriculum. Habrá dos terrenos de importancia creciente: de una parte, el comercio y su control por medio de la contabilidad doble; de otro, la construcción de fortines.

A finales del siglo XV, la artillería adquirió suficiente movilidad y precisión como para acumulada en cantidades suficientes barrer a cañonazos las viejas fortalezas medievales. La frontera a partir de la cual el fenómeno apareció como irreversible fue la invasión de Italia por Carlos VIII en 1494. Provisto de un tren de sitio de cuarenta cañones hipomóviles, obtuvo la rendición de ciudades que habían conseguido resistir a largos sitios en el Medievo fulminando sus murallas verticales por la concentración de tiro de los cañones. Maquiavelo señalaba que no existía muro por grueso que fuera que no pudiera ser abatido en pocos días de cañoneo. El arquitecto y humanista Leon Battista Alberti en *De re aedificatoria* (1440) encontró la solución que sería implantada en los siglos posteriores: el bastión. De murallas bajas y muy gruesas con perfiles angulares para reducir el impacto de los proyectiles exigía, al no poder vigilar el terreno como los amurallamientos verticales, formar complejos de bastiones desde los que hacer fuego de flanqueo contra los ataques de la infantería. La nueva disposición recibió el nombre de *trace italienne* ([19], pp.27 y ss.), y su coste se reveló tan pasmoso como sumamente complicado de construir. Los bastiones exigían una planificación rigurosa del terreno, el levantamiento de cartas y planos, un diseño de creciente complejidad (los de la ciudad de Turín llegaron a dominar hasta 80 Km^2) y un aprovechamiento minucioso de los materiales que debían ser reunidos en forma masiva. Los artesanos que construyeron catedrales y castillos eran incapaces de una labor tal y todos los ejércitos se vieron en la necesidad de educar y crear un cuerpo de ingenieros.

La educación de estos ingenieros irá perfilándose durante el siglo xvi, pero en ella las matemáticas son la materia reina. Los números están detrás del poder de los reyes y nadie los desalojará de ese papel que han adquirido con el triunfo de la pólvora y el estruendo de los cañones. Las asignaturas de estas escuelas de ingeniería irán poco a poco definiéndose. Un currículum completo y maduro nos lo ofrece la Academia de Matemáticas fundada por Felipe II en 1583 bajo la dirección del arquitecto Juan de Herrera y en la que enseñaron los principales expertos en ingeniería militar de los austrias. El objetivo de los estudios era la más rápida capacidad práctica: fortificación, dibujo, uso del compas, del cuadrante y de los instrumentos matemáticos, proporción y transformación de medidas, estereotomía, pero también aritmética, geometría práctica y especulativa, trigonometría, geografía e inteligencia de planos. Se trata de buscar un equilibrio entre nivel científico y aplicación práctica que, como había señalado Platón, capacite en los aspectos teóricos para conseguir una mejor aplicación a la realidad [8], Cap.IV). El ingeniero aparece como un ejemplo vivo del poder de la matemática y a él se incorporará, siguiendo el mismo camino temporal, el contable.

El auge comercial que produjo el Renacimiento con el establecimiento de redes comerciales, casas matrices, delegaciones, filiales y toda la creciente complejidad de la economía moderna exigió una enseñanza específica que tuviera como eje la aplicación de las matemáticas al comercio por medio del cálculo. En los principales emporios económicos surgen escuelas en las que se enseña a los futuros comerciantes los secretos del cálculo comercial y de la contabilidad. Letras de cambio, pagares, seguros, cambios de moneda, de medida, trueques de mercancía, interés, estados financieros, haberes y débitos exigen del comerciante una capacidad matemática que era ajena a las dimensiones localistas del Medievo. Los manuales utilizados en estas escuelas de cálculo (*botteghe dell'abaco*) que comienzan a proliferar en las ciudades comerciales del norte de Italia a mediados del siglo XV para extenderse a toda la Europa mediterránea están escritos en lengua vulgar y no en latín. Son compendios estrictamente prácticos orientados a la solución de los tipos de problemas habituales en la vida comercial. Algunos de estos manuales gozaron de múltiples reediciones como *Le Kadran aux marchans* (1485) de Jean Gertain. La estructura de los manuales es muy similar. Se comienza por la numeración en cifras árabes, adición y sustracción, multiplicación, división y sus pruebas; operaciones con fracciones. A continuación, en la parte dedicada a los trueques e intercambios, cálculo de precios y reparto de beneficios; la piedra angular es la regla de tres. Por último, se enseña los tipos de cálculo necesarios para la equivalencia entre distintos tipos de monedas.

Algunos de los manuscritos añaden un apartado dedicado al algebra. Este apartado no hace sino extenderse más y más desde mediados del siglo XIV y uno de sus objetivos es señalar las ecuaciones tipo y sus soluciones. En 1480 se habían alcanzado ecuaciones de sexto grado. Diversas simbolizaciones trataban de encontrar las equivalencias y reducir los tipos de ecuaciones al número mínimo imprescindible. Esta verdadera reorganización algebraica no tiene un interés puramente teórico, pues en los tratados los problemas que suponen un planteamiento algebraico son cada vez más. El cálculo necesario al comercio se convierte así en medio de impulsar el desarrollo del algebra, una continuación del trabajo de los algebristas árabes y su esfuerzo de independizar el algebra de la geometría al dotarla de un simbolismo adecuado.

El marchamo del éxito que corona a la matemática comercial refuerza la figura del matemático en el ámbito universitario y permite que la matemática pura sea contemplada ya no a la manera especulativa medieval sino como un medio potencialmente poderoso de extender el control del ser humano sobre el mundo. A través de los siglos XIV-XV la práctica comercial ofrece al matemático un estatus profesional desconocido hasta entonces convirtiéndose las escuelas del ábaco en verdaderas escuelas profesionales.

Con la educación de ingenieros y contables la promesa del ideal matemático platónico comienza a hacerse realidad y el dominio tecnológico del mundo parece una tarea accesible. La eclosión de la nueva ciencia verá aplanado su camino al éxito por esta percepción de la matemática como el instrumento del dominio del ser humano. Es esa promesa de poder la que impulsará el triunfo de la astronomía copernicana y de la nueva ciencia.

6 La Revolución Científica: el triunfo de la matemática como signo de estatus del especialista científico.

La conocida como Revolución Científica comenzará con una rotunda declaración de pitagorismo por parte de Nicolás Copérnico y acabará con el triunfo de la física newtoniana y la aceptación universal de la matemática como núcleo esencial del método hipotético deductivo. Dominar la matemática será la señal inequívoca de la pertenencia a la comunidad científica.

Copérnico era consciente de las dificultades que suponía la aceptación del movimiento de la Tierra, un hecho totalmente opuesto a las experiencias cotidianas de los individuos que, según los planteamientos anquilosados de la escolástica, formaban el sustrato empírico de donde la ciencia debía surgir. Las razones de Copérnico debían dirigirse no a los charlatanes sino a los astrónomos expertos[19] y su esperanza recaía en su mayor capacidad predictiva y en la armonía estética de su organización frente a la maraña de los epiciclos ptolemaicos, una belleza fundada en su simplicidad matemática[20]. Aunque no hay episodio de la Revolución Científica que no

[19] “Si por casualidad hay charlatanes[$\mu\alpha\tau\alpha\iota o\lambda o\gamma o\iota$] que, aun siendo ignorantes de las matemáticas, presumen de un juicio sobre ellas [las tesis heliocéntricas] por algún pasaje de las Escrituras, malignamente distorsionado de su sentido, se atrevieran a rechazar y atacar esta estructuración mía, no hago caso en absoluto de ellos... Las matemáticas se escriben para los matemáticos...” (Prefacio de [20], p.94.)

Vide [5], pp.68-78 en el que declara que la única opción decisiva y revolucionaria de Copérnico fue tomar partido por el pitagorismo.

[20] “Las matemáticas de Copérnico le distinguen de sus predecesores, y es en parte a causa de la matematización que su obra, a diferencia de las de quienes le precedieron, inaugura una revolución” ([15], p.197)

“So to-day, when Einstein and his followers proclaim that physical facts, such as gravitation, are to be construed as exhibitions of local peculiarities of spatio-temporal properties, they are following the pure Pythagorean tradition. In a sense, Plato and Pythagoras haya sido examinado hasta la saciedad y no falten autores que señalen que el cálculo copernicano era tan complejo como el ptolemaico,([25], pp.3-6) la apelación de Copérnico a los matemáticos esconde la conciencia de pertenencia a una comunidad científica cuyos especialistas son los únicos que pueden juzgar porque son los únicos que entienden las razones dadas en el lenguaje de la ciencia: la matemática.

La batalla que se produjo en torno al heliocentrismo ha merecido la exégesis de los elementos sociológicos, políticos y religiosos que se esconden tras la aparente rivalidad teórica. La lucha por el control de la producción científica marcaba igualmente, y es este el punto que nos interesa destacar, dos bandos en los que se debatía no sólo la prevalencia del argumento de autoridad sobre la autonomía del investigador sino también el deseo de evitar el fraccionamiento de un sistema construido laboriosamente durante la Edad Media en el que un docto, con la ayuda de la lectura de los libros de las autoridades y su habilidad en el uso de la Lógica aristotélica,[21] podía entablar una discusión sobre grandes áreas del conocimiento. La aparición del especialista científico con un lenguaje y unos criterios de verdad propios creaban un mundo inaccesible reservado para los expertos. El uso del lenguaje matemático marcaba la frontera.

La inconmensurabilidad entre paradigmas de las que nos habla Khun cuando define las características del cambio revolucionario apunta también a este hecho ([14], pp.305-308). El juicio de Galileo será su cara más dramática. Cuando sus jueces acusen a Galileo de intentar salvarse apelando a la vieja doctrina occamista de la doble verdad —una verdad científica y otra religiosa— Galileo les responderá con la visión de un Dios geómetra que ha construido el universo como un sistema matemático inmutable, permitiendo al ser humano acceder a la absoluta certeza del conocimiento científico en los fragmentos de la Naturaleza que investigue. La Naturaleza está escrita con caracteres matemáticos.

Así pues, la Revolución Científica no sólo destruirá la visión medieval del mundo organizada alrededor del geocentrismo, acabará también con la física aristotélica y, lo que es más importante, con la posibilidad de investigar la Naturaleza con métodos cualitativos basados en los "aspectos" de los fenómenos. La Lógica retornará al mundo de la explicación y cuando Newton vuelva a utilizar en su *Óptica* (1704) la palabra inducción nadie pensará en otro referente que el análisis matemático de la realidad que permite el cálculo infinitesimal.[22] La Nueva Ciencia arramblará la larga tradición científica aristotélica que quedará fatalmente unida a la justificación dogmática del principio de autoridad. La identidad entre la estructura del mundo y la del lenguaje matemático será una verdad que ya no se pondrá en duda.

stand nearer to modern physical science than does Aristotle..." ([26],p. 36)

[21] "Of course, Logic teaches us to know whether the conclusions and demonstrations which are already discovered and at hand are consistent but it cannot be said that it teaches us how to find consistent conclusions and demonstrations" (Galileo Galilei, *Opere*, XIII, p.134 cit. en [7], p. 65)

[22] Vide el estudio introductorio sobre la matematización de los estudios ópticos por Newton de Carlos Solís a su edición de la *Óptica*,[21], pp. XLV-L.

Referencias

[1] Aristóteles, *Metafísica* , Gredos, Madrid 1982.

[2] Aristóteles, *Acerca de la generación y la corrupción*, Gredos, Madrid 1987.

[3] *Tratados de Lógica (Órganon)II,* ,Gredos, Madrid, 1988)

[4] J.L. Austin, “La línea y la caverna en la República de Platón”, *Teorema*, vol. X/2-3, 1980.

[5] M. Boas, *The Scientific Renaissance 1450-1630*, Harper Torchbooks, New York 1972.

[6] Jean Brun, *Platón y la Academia*, Eudeba, B. Aires 1961.

[7] E. Burt, *The Methaphysical Foundations of Modern Physical Science*, Routledge & Kegan Paul, London 1967.

[8] H. Capel, J. E. Sánchez, O. Moncada, *De Palas a Minerva. La formación científica y la estructura institucional de los ingenieros militares en el siglo XVIII*, Serbal-CSIC, Madrid 1988.

[9] Alan F. Chalmers, *Qué es una cosa llamada ciencia*, Siglo XXI,Madrid 1984.

[10] P. Duhem, *Le sistème du monde*, Hermann, París 1913.

[11] Duhem, *To Save the Phenomena. An Essay on the Idea of Physical Theory from Plato to Galileo*, The University of Chicago Press, London 1969.

[12] W. Jaeger, *Paidea*, FCE, Mexico 1956.

[13] François Chatelet, *Historia de la Filosofía*, Espasa-Calpe, vol I,Madrid 1976

[14] T. S. Khun, *La estructura de las revoluciones científicas*, F.C.E., Madrid 1971.

[15] T. S. Khun.; *La Revolución copernicana*, Ariel, Barcelona 1978.

[16] M. El-Abbadi, *La Biblioteca de Alejandría, Vida y destino*, UNESCO. 1994.

[17] E. Mach, *The Science of Mechanics*, La Salle, Illinois 1974.

[18] C. Mínguez, *La ciencia helenística*, Departamento de Historia de la, Filosofía, Universidad de Valencia, 1979.

[19] G. Parker, *La revolución militar. Las innovaciones militares y el apogeo de Occidente, 1500-1800,* Crítica, Barcelona 1990.

[20] Copérnico, *Sobre las revoluciones de los orbes celestes*, Edición a cargo de Carlos Minguez, Editora Nacional, Madrid 1982.

[21] I. Newton, *Óptica*, Editora Nacional, Alfaguara, Madrid 1977.

[22] Platón, *La República*, Centro de Estudios Constitucionales, Madrid 1981.

[23] M. Serres, (Editor), *Historia de las ciencias*, Cátedra, Madrid, 1991

[24] F. Van Steenberghen,*La Philosophie au XIII* ^{e} *siècle,* Louvain Publications Universitaires, Louvain 1966.

[25] R. S. Westman,(Editor), *The Copernican Achievement*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles 1975.

[26] A.N.Whitehead, *Science and the Modern World*, Free Association Books, London 1985