

Modelo numérico de simulación del flujo de agua en el suelo afectado por la absorción de la raíz

Numerical model for the simulation of soil water flow under root absorption conditions

del Vigo, Á.^{a*}, Juana, L.^{b1} y Rodríguez-Sinobas, L.^{b2}

^a Profesor Asociado. Universidad de Castilla-La Mancha. Dpto. Física Aplicada. Campus Fábrica de Armas. 45004, Toledo, España.

^b Catedrático de Universidad. ETSI Agronómica, Alimentaria y de Biosistemas de la U.P.M. Av. Puerta de Hierro 2. 28040, Madrid, España.

E-mail: ^aAngel.delVigo@uclm.es; ^{b1}luis.juana@upm.es; ^{b2}leonor.rodriguez.sinobas@upm.es

*Autor para correspondencia

Recibido: 25/10/2021

Aceptado: 10/01/2022

Publicado: 31/01/2022

Citar como: del Vigo, Á., Juana, L., Rodríguez-Sinobas, L. 2022. Numerical model for the simulation of soil water flow under root absorption conditions. *Ingeniería del agua*, 26(1), 37-46. <https://doi.org/10.4995/la.2022.16531>

RESUMEN

El artículo presenta un programa basado en un método explícito de integración por diferencias finitas para la simulación del flujo de agua en el suelo bajo condiciones de riego por goteo superficial en régimen variable (suelo no saturado). El programa original, que simula el movimiento del agua en suelo desnudo, fue validado por comparación con soluciones analíticas, otros modelos numéricos y ensayos experimentales; a este código, recientemente se le ha añadido una subrutina que simula la absorción de la raíz de la planta mediante un modelo de aproximación macroscópica que depende explícitamente del tiempo. Este trabajo presenta los detalles del modelo numérico de absorción de la raíz así como algunas de sus simulaciones.

Palabras clave | simulación del riego, ecuación de Richards, aproximación macroscópica, circuito-RC, método explícito, riego por goteo.

ABSTRACT

An explicit finite differences routine was developed to simulate three-dimensional water flow from trickle irrigation under unsaturated non-stationary conditions; the code was validated by comparison with analytical solutions, other existing numerical models and laboratory experiments. Recently, the model was improved in order to reproduce flow root absorption via a time dependent macroscopic approach. This work presents the numerical model subroutine for root absorption and some results obtained by the model.

Key words | flow simulation, Richards equation, macroscopic approach, RC-circuit, explicit scheme, trickle irrigation.

INTRODUCCIÓN

La dinámica del flujo de agua en cultivos depende en gran medida de la distribución de las raíces de la planta y de su tasa de absorción (Hopmans y Bristow, 2002; Zapata-Sierra et al., 2021), por lo que es necesario mejorar las herramientas de análisis del flujo de agua en el suelo bajo condiciones de absorción por las raíces de la planta, como son los modelos de simulación (Musters y Bouten, 1999).

Dejando a un lado los modelos analíticos restringidos a las condiciones del estado estacionario de Warrick et al. (1980) y Philip (1991), han sido reportados algunos avances de interés en las últimas décadas respecto a la simulación de la filtración de agua en condiciones de régimen no estacionario (suelo no saturado) teniendo en consideración el efecto de la absorción de flujo por parte de la raíz de la planta. Los trabajos pioneros de Gardner (1960, 1964, 1965) establecieron las bases de lo que hoy se conoce como modelos de absorción de la raíz de la planta de aproximación microscópica. Estos modelos consideran la raíz de la planta como un cilindro de longitud infinita cuyas propiedades de absorción se definen en cada punto de la red mediante ecuaciones de difusión y de transporte de masa, acopladas a la ecuación de la filtración o ecuación de Richards. Las dificultades existentes para la medición de estas propiedades, así como los problemas derivados de la complejidad inherente a la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales acoplados que afloran, ha dado lugar a que la mayor parte de los modelos que se desarrollan actualmente se encuentran dentro de otro grupo de modelos de simulación conocidos como modelos de absorción de raíz de aproximación macroscópica. En este grupo de modelos (Molz y Remson, 1970; Neuman et al., 1975; Feddes et al., 1976, 1978) se computa el caudal absorbido por la raíz de la planta durante el proceso de integración de la ecuación de Richards, de modo que no existe un acoplamiento de ecuaciones diferenciales, sino que simplemente se introduce un término de extracción de flujo en los puntos que representan la raíz de la planta, como una condición de contorno de la propia ecuación de la filtración (ecuación de Richards). Se trata de un método de integración más sencillo que ha proporcionado resultados con éxito como ya se ha mencionado en la bibliografía (Vrugt et al., 2001).

Aunque la mayoría de los modelos macroscópicos dependen únicamente de la profundidad, hay algunos modelos que consideran variaciones en la absorción de la planta en dos dimensiones (Neuman et al., 1975; Coelho y Or, 1996) y tres dimensiones (Warrick et al., 1980; Lubana et al., 2002; Šimůnek et al., 2006). Algunos de los modelos más utilizados, como el paquete de software HYDRUS-3D (Šimůnek et al., 2006), siguiendo el arquetipo de los modelos de Neuman (1975) y Feddes (1978), relacionan la capacidad de absorción de la planta con el contenido de humedad existente en el suelo a través de un factor adimensional. En este tipo de modelos se considera que a mayor contenido de humedad del suelo, menor es la energía de absorción requerida por la planta. Sin embargo, es evidente que la absorción por la raíz de la planta no solo depende del contenido de humedad del suelo en su entorno, sino también, de los requerimientos hídricos de la misma en cada momento. En este sentido, se presenta en este artículo, un modelo de absorción de agua a través de la raíz dependiente del tiempo, que considera una absorción de flujo mayor al inicio del riego que disminuye exponencialmente en el tiempo. Con ello, se intenta representar el hecho de que la necesidad hídrica de la planta es mayor al inicio del riego, y va disminuyendo a medida que absorbe flujo de agua. No obstante, otros aspectos relacionados con la necesidad hídrica de la planta como pueden ser las condiciones de humedad y temperatura del entorno, así como la insolación que recibe, no son considerados en este modelo.

En estudios previos (del Vigo et al., 2019a, 2019b, 2020a) se ha desarrollado un modelo de simulación del flujo de agua en suelo a través de emisores de riego por goteo superficial en base a un método de integración de la ecuación de la filtración que sigue un esquema de cálculo explícito por diferencias finitas. A este modelo de simulación tridimensional (validado por comparación con modelos analíticos, otros modelos numéricos y ensayos experimentales) se le ha incorporado una subrutina que permite simular el efecto de la absorción de agua a través de la raíz de la planta. Este modelo implementa una disminución exponencial del flujo absorbido por la raíz a través de una función que depende explícitamente del tiempo. En este trabajo se presentan los detalles del modelo de absorción, algunos resultados obtenidos con el mismo, y se discute su validez en base a argumentos físicos. Las estimaciones del modelo pueden ser utilizadas para proyectar sistemas de riego, así como en la programación de calendarios de riego.

MATERIAL Y MÉTODOS

Modelo de simulación

Se desarrolló un código en MATLAB para el estudio de la filtración de agua a través de la ecuación de Richards. El código fue ampliamente validado (del Vigo et al., 2020a) por comparación con soluciones analíticas conocidas y con el programa HYDRUS-3D. Por la simetría del sistema (infiltración desde una fuente de caudal conocido en superficie) el modelo de integración utiliza un sistema de coordenadas cilíndricas (r,z) ¹ para la resolución numérica de las ecuaciones, lo que permite reducir el número de variables espaciales y, por tanto, el tiempo de computación. La ecuación de Richards en 3-D, en términos del potencial matricial $h(\theta)$ [m], conductividad hidráulica $K(\theta)$ [m/s] y el contenido de humedad θ [adim], expresada en este sistema de coordenadas y el tiempo t [s], es:

$$\frac{K}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[K \frac{\partial h}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial h}{\partial z} \right] + \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

La discretización propuesta es:

$$h_{t+\Delta t} = h + \frac{\Delta t \cdot \Delta h}{2 \Delta \theta} \left[\frac{K}{r} \cdot \frac{h_2 - h_4}{\Delta r} + (K + K_1) \frac{h_1 - h}{(\Delta z)^2} + (K + K_2) \frac{h_2 - h}{(\Delta r)^2} + (K + K_3) \frac{h_3 - h}{(\Delta z)^2} + (K + K_4) \frac{h_4 - h}{(\Delta r)^2} + \frac{K_1 - K_3}{\Delta z} \right] \quad (2)$$

Donde se ha utilizado la media aritmética de la conductividad hidráulica sobre un entorno de cada nodo de la red. Se comprobó que el programa es estable numéricamente bajo la siguiente condición de resolución espacio-temporal, que fue derivada a partir de argumentos matemáticos discutidos en la bibliografía (Carnahan et al., 1979):

$$\Delta t < \frac{\theta_s \cdot \Delta z^2}{8000 K_s} \quad (3)$$

Donde K_s y θ_s son, respectivamente, la conductividad hidráulica y el contenido de humedad en saturación del suelo. Para más detalles sobre las condiciones de contorno, estructura del código y su validación se puede consultar la bibliografía (del Vigo et al., 2020b).

Absorción de la raíz

Para introducir el efecto de la absorción radicular, se propone la siguiente función que depende explícitamente del tiempo y que representa el contenido de agua absorbida por la raíz de la planta, θ_a [adimensional], en cada nodo de la red:

$$\theta_a(t) = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (4)$$

Donde t es el tiempo [s] desde el inicio del riego aplicado, ε [adim] es el contenido máximo de agua que puede absorber la planta después de un riego (cuando el tiempo tiende a infinito), y τ [s] es un parámetro que representa el tiempo en que el contenido de humedad absorbido por la raíz alcanza el 63% de la cantidad máxima absorbida definida por ε ; obsérvese que según la ecuación propuesta: $\theta_a(\tau) = 0.63\varepsilon$. Esta fórmula es equivalente a la del proceso de carga de un condensador en régimen transitorio, conectado a una fuente de tensión (o potencial) constante en un circuito de c.c. (del Vigo y Somolinos, 2021). Por lo tanto, se propone que el caudal absorbido por unidad de volumen [s⁻¹] a través de la raíz de la planta sea:

$$q_a = \frac{d\theta_a}{dt} = \frac{\varepsilon}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

¹ Estando el gotero en el origen del sistema de referencia, la coordenada r representa la distancia de cualquier punto sobre la dirección radial, mientras que la coordenada z es la cota del punto sobre el eje vertical.

Las ecuaciones (4-5) representan un flujo absorbido máximo al inicio del proceso que va disminuyendo con el tiempo, siguiendo una tendencia exponencial, a medida que las necesidades hídricas de la planta se van reduciendo. Obsérvese que cuando el tiempo tiende a infinito, el flujo absorbido tiende a cero lo que representa que el potencial de absorción de las raíces se iguala al potencial matricial del suelo.

Al tratarse de un modelo de absorción de aproximación macroscópica, el caudal absorbido (q_a) se extrae de todos los puntos de la red que representan el dominio de la raíz de la planta, en cada paso de tiempo, durante el proceso de integración de la ecuación de la filtración. De acuerdo con la simetría del sistema, se supone una forma de raíz cilíndrica de radio R_r [m] y profundidad Z_r [m]. Dependiendo del tipo de planta y el tamaño de su raíz se definen los parámetros ε , τ , R_r y Z_r . Los dos últimos parámetros que corresponden al tamaño de la raíz se pueden estimar por observación directa de la raíz de la planta en estudio. El parámetro ε puede obtenerse experimentalmente midiendo para un tiempo infinito (o muy grande) la diferencia en el contenido de humedad entre dos puntos del suelo que hayan sido sometidos a las mismas condiciones de riego (mismo caudal aplicado y distancia de la fuente), estando uno de ellos en contacto con la raíz de la planta y el otro alejado de la misma. Se propone utilizar un valor para el parámetro τ igual a la sexta parte del tiempo entre dos riegos consecutivos, siempre que este intervalo de tiempo (t_f) sea lo suficientemente largo como para considerar que la cantidad de agua absorbida en cada punto es equivalente a ε . Utilizando este valor para el parámetro τ , se puede suponer que la cantidad de agua absorbida por la planta para tiempos largos (cerca de t_f) después de la aplicación del riego es muy poca, o despreciable, lo que representa físicamente que el potencial de succión de la planta tiende a equipararse con el potencial matricial de succión del suelo seco. Se ha comprobado que el valor de este parámetro se puede relajar, como se discutirá más adelante, hasta un tiempo $\tau = t_f/4$, sin que la función que se propone pierda esta característica.

Parámetros de la simulación y características del suelo

En el siguiente capítulo se presentan resultados de simulación para un suelo caracterizado por las funciones de van Genuchten-Mualem (van Genuchten, 1980; Mualem, 1976) que está definido por los parámetros que se resumen en la Tabla 1. Estos datos han sido obtenidos por funciones de pedo-transferencia a través del software ROSETTA (Schaap et al., 2001) para un suelo de la localidad de Natabuela, en la provincia de Imbabura (Ecuador), el cual, se puede consultar en la bibliografía (Colimba et al., 2021).

Tabla 1 | Parámetros del suelo. Caracterización del suelo referida a las funciones del van Genuchten-Mualem.

| θ_r | θ_s | α | n | K_s |
|------------|------------|-------------------------|--------|----------------|
| 0.0515 | 0.4518 | 0.0044 cm ⁻¹ | 1.5427 | 0.03453 cm/min |

El tiempo de aplicación de riego en las simulaciones que se presentan a continuación es de 10 min, a través de un gotero de caudal $q=2.06$ L/h. Se presentan resultados de simulación de la evolución de flujo de agua en el suelo hasta 120 min después del inicio del riego, es decir, el proceso consta de 10 minutos en fase de infiltración, más otros 110 minutos de fase de redistribución del agua en el suelo. Los parámetros utilizados para el modelo de absorción de la raíz, así como otros parámetros relativos a las simulaciones que se presentan a continuación, como son la resolución espacio-temporal, o el número de nodos de la red de integración, se resumen en la Tabla 2. El parámetro relativo a la resolución temporal dt_{max} que representa el paso de tiempo máximo² sigue el criterio que determina la Ecuación (3):

Tabla 2 | Datos de las simulaciones. La resolución espacial y el número de puntos de la red es el mismo en las dos direcciones $dr=dz$, $N_r=N_z$.

| θ_0 | q | t_{irr} | t_f | R_r | Z_r | τ | ε | N_r | dr | dt_{max} |
|------------|----------|-----------|---------|-------|-------|-----------|---------------|-------|---------|--------------|
| 0.2037 | 2.06 L/h | 10 min | 120 min | 10 cm | 10 cm | 20-30 min | 0.01 | 160 | 0.25 cm | 0.000102 min |

² El programa utiliza una resolución temporal decreciente en el tiempo, de modo que, el paso de tiempo en el proceso de integración crece hasta el valor máximo que indica la Tabla 2; esto permite optimizar el proceso de computación evitando problemas de divergencia numérica.

RESULTADOS

En esta sección se presentan algunos resultados de simulación que muestran las características del modelo de predicción propuesto, y que permiten analizar el efecto que sobre la dinámica del fluido ejerce la absorción por la raíz de la planta. En la siguiente sección se discuten los resultados.

La Figura 1 representa la cantidad de agua absorbida (θ_a) y el caudal absorbido (q_a) por la raíz para un nodo de la red ubicado en $(r,z)=(5,-5)$ cm, y en contacto con la raíz de la planta. Se muestran resultados de simulación para dos valores distintos del parámetro de tiempo: $\tau=t_f/6$ (línea continua) y $\tau=t_f/4$ (línea discontinua). Obsérvese que el comportamiento de estas funciones es el mismo que describen las ecuaciones (4) y (5). La Figura 2 representa el contenido de humedad bajo el gotero al final de la simulación (para un tiempo de 120 minutos), así como dos estados intermedios recogidos a tiempos de 30 min y 60 min. En este caso, se representa el perfil de humedad obtenido con el modelo para tres valores distintos del parámetro temporal $\tau=20, 24, 30$ min, frente al calculado para un suelo desnudo. Se muestra una imagen ampliada de la zona más superficial del suelo con objeto de analizar cómo afecta el parámetro de tiempo τ a la evolución de la humedad en el entorno de la raíz. Fue necesario alcanzar una resolución espacio-temporal de $(dr, dt_{max})=(0.25$ cm, 0.000102 min) para percibir estas diferencias. La Figura 3 representa las líneas de contenido de humedad constante para un plano de simetría r-Z al final de la simulación (tiempo de 120 minutos). Y por último, la Figura 4 representa la evolución del frente de avance en superficie ($r_{f.a.}$) considerando un contenido de humedad para esta magnitud igual al 150% del contenido de la humedad inicial, es decir, contenido de agua del frente de avance: $\theta_{f.a.}=1.5 \cdot \theta_0$. En estas dos últimas figuras se han representado los resultados que predice el modelo de absorción radicular para un valor del parámetro de tiempo $\tau=t_f/6$, frente a los resultados calculados para un suelo desnudo.

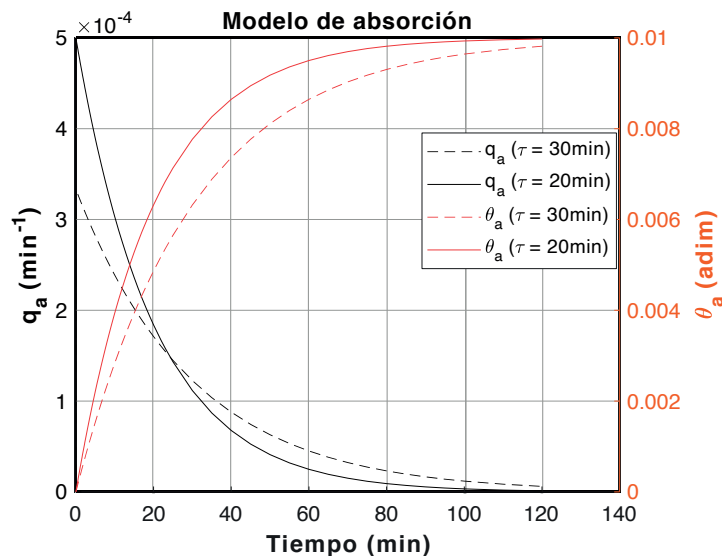


Figura 1 | Evolución de la cantidad de agua absorbida en un punto (θ_a , naranja) y caudal absorbido (q_a , negro) hasta un tiempo de 120 minutos de filtración. Punto de estudio: $(r,z)=(5,-5)$ cm. Parámetros del suelo de la Tabla 1. Se muestra con línea continua los resultados obtenidos para un parámetro temporal igual a $\tau=t_f/6$, y con línea discontinua los obtenidos para $\tau=t_f/4$. El tiempo de aplicación de riego es de 10 min.

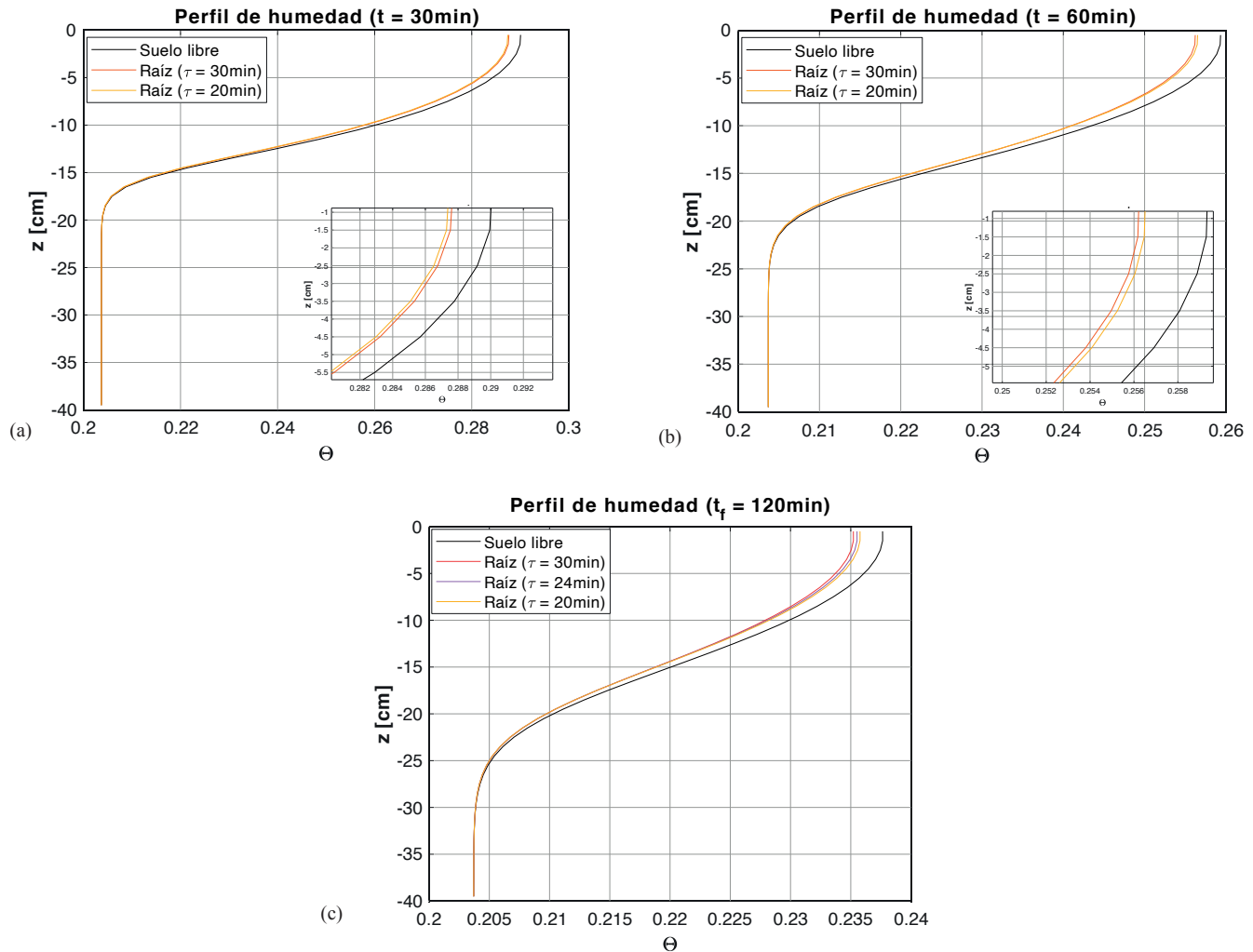


Figura 2 | Contenido de humedad bajo el gotero para el suelo de la Tabla 1 a 30 min, 60 min y 120 min de filtración. El tiempo de aplicación de riego es de 10 min. Comparación entre la predicción del modelo para distintos valores del parámetro de tiempo: $\tau = t_f/6 = 20$ min (amarillo), $\tau = t_f/5 = 24$ min (morado) y $\tau = t_f/4 = 30$ min (rojo), frente al perfil de humedad de un suelo libre de plantas (línea negra). Resolución espacial: $(N_r, dr) = (160, 0.25)$ cm.

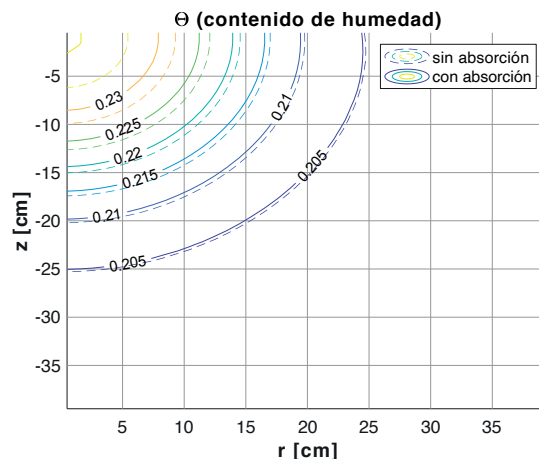


Figura 3 | Líneas de contenido de humedad constante (suelo de la Tabla 1) después de 120 min de filtración. Predicción del modelo considerando el efecto de la absorción por la raíz (línea continua) para un valor $\tau = t_f/6$, y sin considerarlo (línea discontinua).

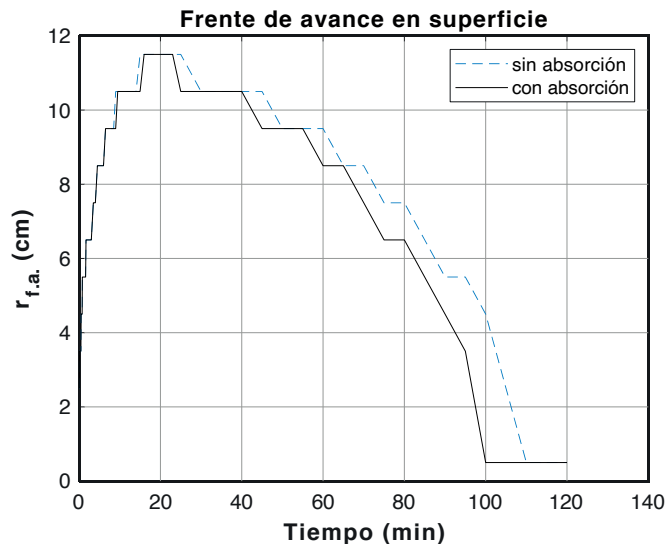


Figura 4 | Evolución del frente de avance en superficie (suelo de la Tabla 1) hasta 120 min de filtración. Tiempo de riego, 10 min. Comparación entre la predicción del modelo considerando el efecto de la absorción por la raíz (línea continua) para un valor $\tau = t_f/6$, y sin considerarlo (línea discontinua).

DISCUSIÓN

La Figura 1 muestra un comportamiento exponencial para la absorción del flujo en cada punto de la red en contacto con la raíz de la planta. El caso que representa un valor para la constante de tiempo recomendada $\tau = t_f/6$ (línea continua), muestra una tendencia exponencial más acusada, en la que el nodo de estudio ha absorbido una cantidad de agua igual al 99.76% de la capacidad máxima de absorción de la planta (ϵ , en el infinito) para este punto de la red, mientras que el caudal absorbido es igual a $1.24 \cdot 10^{-6} \text{ min}^{-1}$ al final de este proceso. En el segundo caso, en el que se utiliza un valor más relajado para la constante de tiempo $\tau = t_f/4$, se muestra también una tendencia exponencial, aunque en este caso la cantidad de agua absorbida al final de la simulación tan solo alcanza el 98.17% del valor máximo (ϵ), siendo el caudal final absorbido $6.11 \cdot 10^{-6} \text{ min}^{-1}$. En cualquiera de los dos casos, se puede asumir razonablemente la hipótesis de partida, es decir, que el flujo absorbido al final de la simulación es despreciable, y por tanto, que el potencial de succión de la planta es equivalente al potencial matricial del suelo al final del proceso. El modelo del condensador en c.c. que se ha utilizado sigue el mismo fundamento físico. Cuando el condensador se llena de carga, el potencial entre sus placas se iguala al de la batería que moviliza la carga hacia su interior, de modo que, el flujo de carga se detiene llegando a un estado de equilibrio. En este sentido, se puede considerar que estos dos sistemas, de naturaleza totalmente distinta, se comportan de una forma similar.

En la Figura 2 se observa que el contenido de humedad del suelo es menor al considerar el efecto de absorción por la raíz de la planta. Se observa que la absorción es predominante en las zonas más superficiales del suelo que están en contacto con la raíz. A partir de un cierto límite (alrededor del doble de la profundidad que alcanza la raíz) las diferencias se pueden considerar despreciables. Este efecto varía sensiblemente con el valor de la constante de tiempo τ . Para los valores estudiados de la constante de tiempo más pequeños, la absorción de flujo es mayor al inicio del proceso, de modo que, el contenido de humedad de la curva $\tau = t_f/6 = 20 \text{ min}$ es menor en los puntos que están en contacto con la raíz de la planta a 30 min del inicio el riego (Figura 2a). Sin embargo, a tiempos mayores (Figuras 2b-2c) el caudal absorbido es mayor para valores de la constante de tiempo más grande como $\tau = t_f/4 = 30 \text{ min}$, lo que representa que el contenido de humedad del suelo es sensiblemente inferior en el entorno de la raíz de la planta en estos dos últimos casos. En cualquier caso, estas diferencias son tan pequeñas (se ha ampliado el campo de visión de la gráfica de la región afectada) que se pueden considerar despreciables desde un punto de vista experimental. Para poder observarlas en simulación, fue necesario alcanzar una resolución espacio-temporal igual a $(dr, dt_{max}) = (0.25 \text{ cm}, 0.000102 \text{ min})$.

En la Figura 3 se observa un efecto similar, aunque en este caso, sobre todo el plano de simetría r-Z. Se muestra que la cantidad de agua en la zona del suelo que está en contacto con la raíz de la planta (líneas continuas) es menor para todos los puntos que la cantidad de agua que predice el modelo en esta misma zona para un suelo libre de raíces (líneas discontinuas). A partir de un cierto límite (aproximadamente los 25 cm) ambos contenidos de humedad tienden a equipararse.

Por último, la Figura 4 muestra como el avance del frente mojado es, para todos los tiempos, igual o mayor en un suelo desnudo (línea discontinua) y que no está afectado, por tanto, por el proceso de absorción radicular. En este sentido, es de esperar que la absorción de las raíces más superficiales afecte a esta característica del flujo, viéndose reducido el contenido de agua sobre la superficie del suelo. La diferencia entre los dos frentes de avance que muestra esta figura se manifiesta más acusadamente para tiempos grandes debido a que la cantidad de agua absorbida por la planta en todos los puntos (y en particular sobre la superficie) crece con el tiempo. Las diferencias observadas en las Figuras 3 y 4 se han obtenido para una resolución espacio-temporal más relajada: $(dr, dt_{max})=(1 \text{ cm}, 0.001635 \text{ min})$.

CONCLUSIONES

La simulación muestra un comportamiento del modelo de absorción a través de la raíz que resulta coherente tanto desde el punto de vista fisiológico de la planta como desde un punto de vista físico en el suelo. Las desviaciones del contenido de humedad previsto respecto a un suelo desnudo son más acusadas en las zonas en las que hay un contacto directo del suelo con la raíz de la planta. En las zonas cercanas a la raíz, también se observa este fenómeno, aunque en menor medida, debido a que la pérdida de flujo de agua a través del sumidero que conforma la raíz afecta a la dinámica del flujo en su entorno. Sin embargo, este efecto se va atenuando hasta que prácticamente los contenidos de humedad de todos los casos estudiados en las zonas alejadas de la raíz son indistinguibles; lo que sucede a distancias superiores a 2.5 veces la longitud de la raíz. El valor de la constante de tiempo recomendado $\tau=t_f/6$, representa un régimen asintótico para el flujo de agua absorbido al final del proceso, que se adecúa a las características predictivas del modelo que se han planteado bajo la hipótesis de ser un proceso semejante al de la carga de un condensador en un circuito-RC de corriente continua. Se ha comprobado que se puede relajar este parámetro, no obstante, hasta un tiempo $\tau=t_f/4$ sin que ello suponga grandes desviaciones del planteamiento respecto al modelo. Los resultados de simulación que muestra la Figura 2, han sido confirmados para una resolución espacio-temporal cuatro veces mayor ($dr=0.25 \text{ cm}$) según el esquema de la Ecuación (3) que el del resto de figuras. En todos los casos, se ha encontrado que el contenido de humedad del suelo al final del proceso es sensiblemente mayor para las funciones asociadas a una constante de tiempo (τ) más grande; este efecto, que contradice lo que en un principio cabría esperar, ya que el contenido de agua neto absorbido por la planta es sensiblemente mayor para el caso de los valores de τ más reducidos, tiene su explicación en la compensación del flujo que se produce en el suelo por efecto de la capilaridad al inicio del proceso, que también es más acusada para los valores τ más pequeños en los que la absorción es mayor al inicio del mismo. De hecho, se ha observado que el contenido de humedad que muestra el perfil de la Figura 2c es menor, para las funciones definidas con un valor τ más pequeño, en las regiones que están a una mayor profundidad.

En cualquier caso, las diferencias del contenido de humedad observadas para el rango de valores en los que se ha estudiado el parámetro de tiempo $\tau=(t_f/6, t_f/4)$, son imperceptibles desde un punto de vista experimental, por lo que se concluye que cualquier valor que se utilice dentro de este rango de valores es aceptable para el estudio del flujo con este modelo de simulación. Del mismo modo, una resolución espacio-temporal como la que se ha utilizado en las Figuras 3 y 4 de este artículo ($dr, dt_{max})=(1 \text{ cm}, 0.001635 \text{ min})$, se considera suficiente para alcanzar resultados de simulación con una precisión semejante a la que se podría obtener a través de un experimento físico.

Como se ha mencionado en la introducción, el modelo no tiene en consideración aspectos que también afectan directamente a la necesidad hídrica de la planta como pueden ser las condiciones externas de humedad, temperatura e insolación; sin embargo, a través de una medida adecuada del parámetro ε en función de estas condiciones, se podría ajustar el flujo de agua absorbido por la raíz de la planta, y por tanto, de formar implícita relacionar estos factores con el modelo a través de este parámetro.

El modelo que es potencialmente útil para el desarrollo de sistemas y calendarios de riego, se está utilizando para estudiar las dosis y frecuencias necesarias de riego sobre las plantaciones de tomate en invernadero que existen en la provincia de Imbabura (Ecuador), de la que proceden los datos del suelo que representa la Tabla 1. Los autores consideramos que el modelo sería aplicable a cualquier otro tipo de plantación que fuera sometida a riego por goteo, una vez conocido el tamaño de su raíz así como los parámetros del suelo.

REFERENCIAS

- Carnahan, B. 1979. *Cálculo numérico. Métodos y aplicaciones*. Rueda ed. Madrid.
- Coelho, F.E., Or D. 1996. A parametric model for two-dimensional water uptake intensity by corn roots under drip irrigation. *Soil Science Society American Journal*, 60, 1039–1049. <https://doi.org/10.2136/sssaj1996.03615995006000040012x>
- Colimba Limaico, J. E., Zubezu Minguez, S. and Rodriguez Sinobas, L. 2021. Assessing water doses, water use efficiency and tomato quality under greenhouse conditions in Natabuela-Ecuador. *European Geoscience Union 2020, session SSS9.4/EGU21-2911 - The challenges of irrigation in the COVID19 scenario*. Viena, Austria. <https://doi.org/10.5194/egusphere-egu21-2911>
- del Vigo, Á., Zubezu, S., Juana, L. 2019a. Algoritmo para la resolución de la ecuación de Richards en 3-D para riego por goteo: Método, validación y resultados preliminares. *XXXVII Congreso Nacional de Riegos*. Don Benito. Spain. <http://hdl.handle.net/10662/9217>
- del Vigo, Á., Zubezu, S., Juana L. 2019b. Study of water infiltration in soil by Richards equations in 3D: summary and methodology validation. *11th World Congress on Water Resources and Environment*. Madrid. Spain. http://ewra.net/pages/EWRA2019_Proceedings.pdf
- del Vigo, Á., Zubezu, S., Juana, L. 2020a. Numerical routine for soil dynamics from trickle irrigation. *Applied Mathematical Modeling*, 83, 371–385. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.058>
- del Vigo, Á. 2020b. *Simulación del flujo del agua en el suelo en riego por goteo superficial, soluciones analíticas aproximadas, caracterización del suelo y diseño de los riegos*. Phd. Thesis, Universidad Politécnica de Madrid. Madrid. <https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.63840>
- del Vigo, Á., Somolinos, B. 2021. *Teoría de Circuitos. Problemas resueltos*. García Maroto ed. Barcelona. Spain.
- Feddes, R.A., Kowalik, P, Kolinska-Malinka, K, Zaradny, H. 1976. Simulation of field water uptake by plants using a soil water dependent root extraction function. *Journal of Hydrology*, 31, 13–26.
- Feddes, R.A., Kowalik, P., Zaradny, H. 1978. *Simulation of field water use and crop yield. Simulation monographs*. Centre for Agricultural Publishing and Documentation. Wageningen.
- Gardner, W.R. 1960. Dynamic aspects of water availability to plants. *Soil Science*, 89, 63–73. <https://doi.org/10.1097/00010694-196002000-00001>
- Gardner, W.R. 1964. Relation of root distribution to water uptake and availability. *Agronomy Journal*, 56, 41–45. <https://doi.org/10.2134/agronj1964.00021962005600010013x>
- Gardner, W.R. 1965. Dynamic aspects of soil-water availability to plants. *Annual Review of Plant Physiology*, 16, 323–342. <https://doi.org/10.1146/annurev.pp.16.060165.001543>
- Hopmans, J.W., Bristow, K.L. Current capabilities and future needs of root water and nutrient uptake modeling. 2002. *Advances in Agronomy*, 77, 104–175. [https://doi.org/10.1016/S0065-2113\(02\)77014-4](https://doi.org/10.1016/S0065-2113(02)77014-4)
- Lubana, PPS, Narda, N.K., Brown, L.C. 2002. Application of a hemispherical model to predict radius of wetted soil volume under point source emitters for trickle irrigated tomatoes in Punjab state. *Trans ASABE*, 32, 243–257.
- Molz, F.J., Remson I. 1970. Extraction term models of soil moisture use by transpiring plants. *Water Resources Research*, 6, 1346–1356. <https://doi.org/10.1029/WR006i005p01346>

- Mualem, Y. 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resource Journal*, 12, 513. <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00513>
- Musters, P.A.D., Bouten, W. 1999. Assessing rooting depths of an Austrian pine stand by inverse modelling soil water content maps. *Water Resources Research*, 35, 3041–3048. <https://doi.org/10.1029/1999WR900173>
- Neuman, S.P., Feddes, R.E., Bresler, E. 1975. Finite element analysis of two-dimensional flow in soils considering water uptake by roots. *Soil Science Society American Proceedings*, 39, 225–230. <https://doi.org/10.2136/sssaj1975.03615995003900020007x>
- Philip, J.R. 1991. Effects of root and sub irrigation on evaporation and percolation losses. *Soil Science Society American Journal*, 55, 1520–1523. <https://doi.org/10.2136/sssaj1991.03615995005500060003x>
- Schaap, M.G., Leij, F.J., van Genuchten, M.T. 2001. ROSETTA: a computer program for estimating soil hydraulic parameters with hierarchical pedo-transfer functions. *Journal of Hydrology*, 251, 163-176. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(01\)00466-8](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(01)00466-8)
- Šimůnek, J., van Genuchten, M., Šejna, M. 2006. *The HYDRUS Software Package for Simulating the Two- and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media, Technical Manual Version 1.0*. University of California Riverside. Riverside, CA, 3PC. Progress, Prague. Czech Republic.
- van Genuchten, M.T. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44, 892. <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x>
- Vrugt, J.A., van Wijk, M.T., Hopmans, J.W., Simunek, J. 2001. One, two and three dimensional root water uptake functions for transient modelling. *Water Resources Research*, 37(10):2457–2470. <https://doi.org/10.1029/2000WR000027>
- Warrick, A.W., Lomen, D.O., Amoozegard-Fard, A. 1980. Linearized moisture flow with root extraction for three-dimensional, steady conditions. *Soil Science Society American Journal*, 44, 911–914. <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050006x>
- Zapata-Sierra, A.J., Moreno-Pérez, M.F., Reyes-Requena, R., Manzano-Agugliaro, F. 2021. Root distribution with the use of drip irrigation on layered soils at greenhouses crops. *Science of the total environment*, 768, 144944. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2021.144944>